

LÍMITES DE FUNCIONES

- |                                                                            |                                  |                                                                                      |                                   |
|----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 + 1}{2x^3 + 4x + 2}$     | <i>Sol:</i> 2                    | 18) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$                     | <i>Sol:</i> $\frac{\sqrt{3}}{36}$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$               | <i>Sol:</i> $\infty$             | 19) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 2x - 8}$                 | <i>Sol:</i> 0                     |
| 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 5}$             | <i>Sol:</i> 0                    | 20) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 2x - 8}$                       | <i>Sol:</i> $\frac{1}{24}$        |
| 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{2}x}{x + 1}$  | <i>Sol:</i> 0                    | 21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$                        | <i>Sol:</i> 0                     |
| 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$                  | <i>Sol:</i> 0                    | 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$                              | <i>Sol:</i> $\frac{1}{2}$         |
| 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x$                    | <i>Sol:</i> $-\frac{1}{2}$       | 23) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{\sqrt{2x} - 2}$                     | <i>Sol:</i> $\infty$              |
| 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 3x + 2}$      | <i>Sol:</i> -1                   | 24) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x^2}{\sqrt{2x} - 2}$                           | <i>Sol:</i> $\infty$              |
| 8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x}$          | <i>Sol:</i> -2                   | 25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1} - 3}$            | <i>Sol:</i> $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$              | <i>Sol:</i> 1                    | 26) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x + 1} - 3}$                  | <i>Sol:</i> $-\frac{3}{4}$        |
| 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$                  | <i>Sol:</i> -4                   | 27) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{2 - \sqrt{4x}}$                 | <i>Sol:</i> $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ |
| 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$                  | <i>Sol:</i> 0                    | 28) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x + 4} - 3}{2 - \sqrt{4x}}$                 | <i>Sol:</i> $-\frac{5}{6}$        |
| 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$                       | <i>Sol:</i> $\frac{2}{3}$        | 29) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{3x}\right)^{x^2 - 1}$           | <i>Sol:</i> 0                     |
| 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 6}{x^2 + 3x + 2}$ | <i>Sol:</i> $\infty$             | 30) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{2x}\right)^{x^2 - 1}$           | <i>Sol:</i> $\infty$              |
| 14) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 6}{x^2 + 3x + 2}$     | <i>Sol:</i> -13                  | 31) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{3x}\right)^{\frac{4}{x^2 - 1}}$ | <i>Sol:</i> 1                     |
| 15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$       | <i>Sol:</i> 0                    | 32) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x + 1}{3x}\right)^{\frac{4}{x^2 - 1}}$      | <i>Sol:</i> $e^{-\frac{2}{3}}$    |
| 16) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$             | <i>Sol:</i> $\frac{\sqrt{3}}{6}$ | 33) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x - 1}$               | <i>Sol:</i> $e^{-3}$              |
| 17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$     | <i>Sol:</i> 0                    |                                                                                      |                                   |

EJEMPLOS RESUELTOS

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 5}$

Cuando tenemos un cociente de polinomios (algunos de ellos pueden estar dentro de una raíz), con  $x \rightarrow \infty$  y con indeterminación del tipo  $\infty / \infty$ , podemos sustituir cada polinomio por su término (sumando) de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3x^2} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0$$

8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x}$

Si tenemos una resta en la que interviene alguna raíz, con  $x \rightarrow \infty$  y con indeterminación del tipo  $\infty - \infty$ , no podemos sustituir por el término de mayor grado, como en el tipo de problemas del ejemplo anterior. Aquí hay que empezar multiplicando y dividiendo por el conjugado de la resta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + 3x})(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - x) - (x^2 + 3x)}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - 3x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} = \end{aligned}$$

Ahora estamos en las condiciones del tipo de límites resuelto anteriormente, por lo que podemos sustituir cada polinomio por su término de mayor grado:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{2\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -2 = -2$$

Teníamos otra opción, que consiste en dividir numerador y denominador de la expresión resultante entre  $x$  elevada a la máxima potencia con que aparezca entre numerador y denominador (teniendo en cuenta que cuando el polinomio está dentro de una raíz, dicha potencia hay que dividirla entre 2, puesto que una raíz cuadrada equivale a una potencia de exponente  $\frac{1}{2}$ ). En nuestro ejemplo, la máxima potencia de  $x$  en el numerador es 1 y en el denominador, también 1 (el 2 del  $x^2$  lo dividimos entre 2 porque está dentro de una raíz cuadrada). Dividimos numerador y denominador entre  $x^1$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-4x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{3}{x}}} = \\ &= \frac{-4}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{-4}{1 + 1} = -2 \end{aligned}$$

14)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

El problema 13, que tiene la misma expresión pero con  $x \rightarrow \infty$ , es igual al problema resuelto número 3. Pero en éste,  $x \rightarrow -2$  y, al sustituir, obtenemos la indeterminación  $0 / 0$ . En estos problemas hay que descomponer factorialmente los polinomios. Es fácil hacerlo por Ruffini, puesto que ya conocemos un valor que los anula: aquél al que tiende  $x$  (en este caso,  $-2$ ).

	2	3	1	6
-2		-4	2	-6
	2	-1	3	0

	1	3	2
-2		-2	-2
	1	1	0

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 6}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x^2 - x + 3)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - x + 3}{x+1} = \frac{13}{-1} = -13$$

26)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x+1} - 3}$

El problema 25 tiene la misma expresión que éste, pero con  $x \rightarrow \infty$ , produciendo la indeterminación  $\infty / \infty$ . La forma de resolverlo es similar a la de:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x^2 + 3x}}$$

que se hizo antes, en la resolución del problema 8.

Pero en este problema,  $x \rightarrow 4$  (un número), originando la indeterminación  $0 / 0$ . La resolución de un problema de este tipo, en el que hay alguna raíz cuadrada dentro de una resta, pasa por multiplicar numerador y denominador por el conjugado de la expresión que contenga raíces y produzca un cero. Hay dos expresiones de este tipo, una en el numerador y otra en el denominador. Multiplicamos numerador y denominador, pues, por el conjugado de ambas y aplicamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x+1} - 3} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2x+1} - 3} \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} \frac{\sqrt{2x+1} + 3}{\sqrt{2x+1} + 3} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - x}{(2x+1) - 9} \frac{\sqrt{2x+1} + 3}{2 + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(-x+4)(\sqrt{2x+1} + 3)}{(2x+8)(2 + \sqrt{x})} = \end{aligned}$$

Ahora, multiplicando por expresiones que contienen raíces, expresiones a las que no vamos a tocar, aparecen polinomios, tanto en numerador como en denominador, responsables de la indeterminación  $0 / 0$ . Procedemos con ellos de la misma forma que en los problemas del tipo del 14, que hicimos antes; es decir, descomponiéndolos por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rr} & -1 & 4 \\ 4 & & -4 \\ \hline & -1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rr} & 2 & 8 \\ 4 & & -8 \\ \hline & 2 & 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1(x-4)(\sqrt{2x+1} + 3)}{2(x+4)(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-1(\sqrt{2x+1} + 3)}{2(2 + \sqrt{x})} = \frac{-(3+3)}{2(2+2)} = -\frac{3}{4}$$

33)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x-1}$

Los problemas 29, 30 y 31 no originan indeterminaciones, por lo que son inmediatos (consultar el resumen de resultados de límites en los que intervienen  $0$  ó  $\infty$ ). En cambio, el 32 y 33 dan indeterminaciones del tipo  $1^\infty$ , que son límites del tipo número  $e$ . Cuando un límite produce esta indeterminación, se sustituye de la siguiente forma:

$$\lim_{x \rightarrow (\text{lo que sea})} f(x)^{g(x)} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow (\text{lo que sea})} e^{g(x)(f(x)-1)}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x-1)\left(1 - \frac{3}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x-1)\left(-\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x+3}{x}} =$$

El exponente es un cociente de polinomios que da lugar a una indeterminación del tipo  $\infty / \infty$  con  $x \rightarrow \infty$ , que sabemos (problema 3) que se puede resolver sustituyendo cada polinomio por su término de mayor grado:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-3x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-3} = e^{-3}$$